



· 形式概念分析中的概念约简 ·

面向属性概念格的概念约简及其在知识空间理论中的应用

于亚琪^{1,2}, 赵思雨^{1,2}, 魏玲^{1,2,3}

(1. 西北大学 数学学院, 陕西 西安 710127; 2. 西北大学 概念、认知与智能研究中心, 陕西 西安 710127;
3. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘要 保持二元关系不变的概念约简是形式概念分析中一种新的约简理论,可在不损失原始信息的前提下减少概念数量。基于面向属性概念格,研究保持补二元关系不变的面向属性概念格的概念约简。首先,给出面向属性概念约简的定义,并从POC代表概念矩阵的角度给出面向属性概念约简的求解方法和面向属性概念特征;其次,讨论面向属性概念约简与面向对象概念约简之间的关系;最后,基于知识空间理论,给出面向属性概念约简在知识空间理论中的应用。

关键词 形式概念分析;面向属性概念约简;POC代表概念矩阵;面向属性概念特征
中图分类号: O29, TP18 **DOI**: 10.16152/j.cnki.xdxbr.2023-05-013

Concept reduction of property-oriented concept lattices and its application in knowledge space theory

YU Yaqi^{1,2}, ZHAO Siyu^{1,2}, WEI Ling^{1,2,3}

(1. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;

2. Institute of Concepts, Cognition and Intelligence, Northwest University, Xi'an 710127, China;

3. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract Concept reduction preserving binary relation is a new reduction theory in formal concept analysis, it can reduce the number of concepts without losing the original information. This paper studies the concept reduction of property-oriented concept lattices, this newly proposed reduction can preserve the complementary binary relation. First, the definition of property-oriented concept reduction is given. Then, the approach to obtain concept reduction and characteristics of property-oriented concept are given from the perspective of POC representative concept matrix. Moreover, the relationship between property-oriented concept reduction and object-oriented concept reduction are discussed. Finally, the application of property-oriented concept reduction in knowledge space theory is given.

Keywords formal concept analysis; property-oriented concept reduction; POC representative concept matrix; property-oriented concept characteristics

收稿日期: 2023-06-20

基金项目: 国家自然科学基金(12171392, 62006190); 西北大学研究生创新项目(CX2023065)

第一作者: 于亚琪, 女, 从事形式概念分析、粒计算、三支决策理论研究, yuyaqi2021@163.com。

通信作者: 魏玲, 女, 教授, 博士生导师, 从事形式概念分析、粒计算、三支决策理论等研究, wl@nwnu.edu.cn。

1982年,Wille提出了形式概念分析(formal concept analysis, FCA)理论^[1-2]。该理论对哲学中的“概念”进行形式化描述,并将所有概念按照一定的偏序关系和上下确界的定义,形成一个格结构,称之为概念格。经过多年的研究探索,形式概念分析在属性约简^[3-5]、规则获取^[6-8]、三支概念分析^[9-10]等领域产生了一些研究成果。

Duntsch和Gediga在FCA框架下提出了面向属性概念格^[11];Yao提出了面向对象概念格^[12]。目前,关于面向属性概念格与面向对象概念格已产生了许多研究成果。比如:魏玲等提出了一种直接从形式背景出发,获得简化面向属性概念格的方法^[13];Medina研究了概念格、面向属性概念格以及面向对象概念格的属性特征之间的关系^[14];周银凤等基于面向属性概念格求解由合取技能映射确定的知识结构^[15]。

近年来,为减少形式背景与概念格中存在许多冗余信息的问题,许多约简理论被相继提出。其中:魏玲等于2018年提出的保持二元关系不变的概念约简是形式概念分析中新的约简理论^[16-17],与属性约简相比,既避免了原始信息发生改变,又减少了概念数量;王霞等利用概念可辨识矩阵给出了一种求解概念约简的方法^[18];谢小贤等借助布尔矩阵运算研究了概念约简问题^[19];Zhao等从代表概念矩阵角度给出了求解概念约简的方法^[20];智慧来等把概念约简思想引入面向对象概念格,并研究了面向对象概念约简的相关问题^[21]。

目前,关于概念约简的相关研究还没有涉及面向属性概念约简。本文研究面向属性概念格的概念约简及其在知识空间理论中的应用。

本文首先给出面向属性概念约简的定义,随后引入POC代表概念矩阵,基于POC代表概念矩阵给出面向属性概念约简的求解方法与面向属性概念特征;其次,结合面向对象概念约简,给出面向属性概念约简与面向对象概念约简之间的联系;最后,从知识空间的角度,探讨面向属性概念约简的意义。

1 预备知识

定义1^[1] 称 (G, M, I) 是形式背景,其中 $G = \{g_1, \dots, g_p\}$ 为对象集, $M = \{m_1, \dots, m_q\}$ 为属性集, $I \subseteq G \times M$ 为 G 和 M 之间的二元关系。 $(g,$

$m) \in I$,表示对象 g 具有属性 m ,记为 gIm 。 $(g, m) \notin I$,表示对象 g 不具有属性 m ,记为 $g \not Im$ 。

对任意的 $X \subseteq G, B \subseteq M$,Wille^[1]定义了一对导出算子如下,其性质见文献[2]。

$$X^* = \{m \in M \mid \forall g \in X, gIm\}, \quad (1)$$

$$B^* = \{g \in G \mid \forall m \in B, gIm\}. \quad (2)$$

式中: X^* 表示 X 中的所有对象共同具有的属性集合; B^* 表示共同具有 B 中所有属性的对象集合。如果二元组 (X, B) 满足 $X^* = B$ 且 $X = B^*$,则称 (X, B) 是一个概念。其中 X 称为概念的外延, B 称为概念的内涵。

类似地,对任意的 $X \subseteq G, B \subseteq M$,Qi^[9]定义了一对负算子如下,其性质见文献[9]。

$$\bar{X}^* = \{m \in M \mid \forall g \in X, g \not Im\}, \quad (3)$$

$$\bar{B}^* = \{g \in G \mid \forall m \in B, g \not Im\}. \quad (4)$$

式中: $\bar{X}^*$ 表示 X 中的所有对象共同不具有的属性集合; $\bar{B}^*$ 表示共同不具有 B 中所有属性的对象集合。如果二元组 (X, B) 满足 $\bar{X}^* = B$ 且 $X = \bar{B}^*$,则称 (X, B) 是一个 N 概念。其中 X 称为 N 概念的外延, B 称为 N 概念的内涵。将形式背景 (G, M, I) 上的 N 概念全体记为 $NL(G, M, I)$ 。

Duntsch和Gediga^[11]在对象集和属性集上分别定义了 $\square, \diamond$,并给出了面向属性概念的定义。

定义2^[11] 设 (G, M, I) 是形式背景,在对象集 $X \subseteq G$ 和属性集 $B \subseteq M$ 上,定义一对近似算子 $\square, \diamond$ 。

$$X^\square = \{m \in M \mid m^* \subseteq X\}; \quad (5)$$

$$X^\diamond = \{m \in M \mid m^* \cap X \neq \emptyset\}; \quad (6)$$

$$B^\square = \{g \in G \mid g^* \subseteq B\}; \quad (7)$$

$$B^\diamond = \{g \in G \mid g^* \cap B \neq \emptyset\}. \quad (8)$$

对于 $\square, \diamond$,有以下基本性质。

性质1^[11-12] 设 (G, M, I) 形式背景, $X_1, X_2, X \subseteq G, B_1, B_2, B \subseteq M$,有下列基本性质:

$$1) X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1^\square \subseteq X_2^\square, X_1^\diamond \subseteq X_2^\diamond;$$

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1^\square \subseteq B_2^\square, B_1^\diamond \subseteq B_2^\diamond.$$

$$2) X^{\square \diamond} = X^\square, X^{\diamond \square} = X^\diamond;$$

$$B^{\square \diamond} = B^\square, B^{\diamond \square} = B^\diamond.$$

定义3^[11] 如果二元组 (X, B) 满足 $X = B^\square$ 且 $B = X^\diamond$,则称 (X, B) 为面向属性概念。其中 X 称为面向属性概念的外延, B 称为面向属性概念的内涵。

将形式背景 (G, M, I) 上的面向属性概念全体记为 $L_p(G, M, I)$ 。

若 (X_1, B_1) 和 (X_2, B_2) 是面向属性概念,其

偏序关系定义为 $(X_1, B_1) \leq (X_2, B_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (\Leftrightarrow B_1 \subseteq B_2)$, 则 $(L_p(G, M, I), \leq)$ 是偏序集。上确界和下确界分别为

$$\begin{aligned}(X_1, B_1) \vee (X_2, B_2) &= ((X_1 \cup X_2)^{\diamond\Box}, B_1 \cup B_2), \\ (X_1, B_1) \wedge (X_2, B_2) &= (X_1 \cap X_2, (B_1 \cap B_2)^{\Box\diamond}),\end{aligned}$$

则 $(L_p(G, M, I), \vee, \wedge)$ 是完备格, 称之为面向属性概念格。

面向对象概念格的相关定义及性质见文献[12]。

例 1 表 1 给出了一个形式背景 (G, M, I) 。其中: 对象集 $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; 属性集 $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 。 $(g, m) \in I$ 用 1 表示, $(g, m) \notin I$ 用 0 表示。该形式背景的面向属性概念格如图 1 所示。为了方便表述, 将每个面向属性概念以 $c_i (i = 1, 2, \dots, 9)$ 编号。

表 1 形式背景 (G, M, I)

Tab. 1 Formal context (G, M, I)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
1	1	0	1	0	1	1	0
2	1	1	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	1	0
5	1	1	0	0	0	0	1

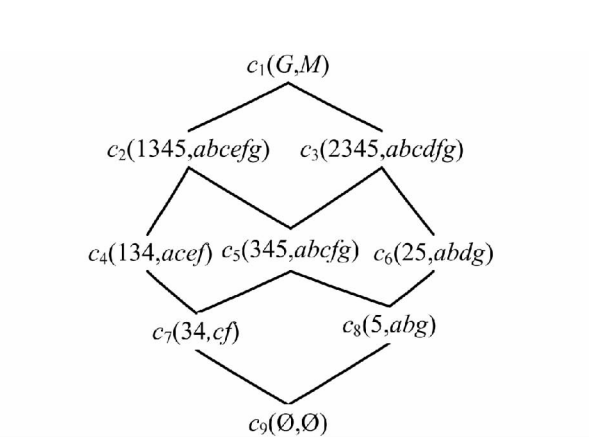


图 1 面向属性概念格 $L_p(G, M, I)$

Fig. 1 Property-oriented concept lattice $L_p(G, M, I)$

2 面向属性概念约简

2.1 面向属性概念约简的定义及存在性

本小节从保持形式背景补二元关系不变的角

度给出面向属性概念约简的定义, 并给出两种特殊的面向属性概念协调集。

文献[2] 给出了形式背景的二元关系与其所有概念之间的关系, 如下引理所示。

引理 1^[2] 设 (G, M, I) 是形式背景, $L(G, M, I)$ 是其概念格, 有

$$I = \cup \{X \times B \mid (X, B) \in L(G, M, I)\}.$$

类似地, 补二元关系可表示为

$$I^c = \cup \{X \times B \mid (X, B) \in NL(G, M, I)\}.$$

根据算子之间的联系, 面向属性概念与 N 概念的关系如下。

性质 2^[14] 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格, $NL(G, M, I)$ 是其 N 概念格, 有

$$(X, B) \in L_p(G, M, I) \Leftrightarrow (X, B^c) \in NL(G, M, I).$$

由引理 1 和性质 2 易得补二元关系也可由所有面向属性概念生成。

定理 1 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格, 则

$$I^c = \cup \{X \times B^c \mid (X, B) \in L_p(G, M, I)\}.$$

定义 4 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格, $F \subseteq L_p(G, M, I)$ 。如果 $F^c = \cup_{(X, B) \in F} X \times B^c$, 则称 F 为保持补二元关系不变的面向属性概念格的概念协调集, 简称面向属性概念协调集; 若对于任意 $(X_0, B_0) \in F, F' = F \setminus \{(X_0, B_0)\}$, 有 $F^c \neq \cup_{(X, B) \in F'} X \times B^c$, 则称 F 为保持补二元关系不变的面向属性概念格的概念约简, 简称面向属性概念约简。

定理 2 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格, 则面向属性概念约简必存在。

证明 若对任意 $(X_0, B_0) \in L_p(G, M, I)$, 有 $\cup_{(X, B) \in L_p(G, M, I)} X \times B^c \neq \cup_{(X, B) \in L_p(G, M, I) \setminus \{(X_0, B_0)\}} X \times B^c$, 则 $L_p(G, M, I)$ 本身即为面向属性概念约简。若存在 $(X_1, B_1) \in L_p(G, M, I)$, 使 $\cup_{(X, B) \in L_p(G, M, I)} X \times B^c = \cup_{(X, B) \in L_p(G, M, I) \setminus \{(X_1, B_1)\}} X \times B^c$, 则研究 $F = L_p(G, M, I) \setminus \{(X_1, B_1)\}$, 若对于任意 $(X_2, B_2) \in F$, 有 $\cup_{(X, B) \in F} X \times B^c \neq \cup_{(X, B) \in F \setminus \{(X_2, B_2)\}} X \times B^c$, 则 F 为面向属性概念约简, 否则, 进一步研究 $F_1 = F \setminus \{(X_2, B_2)\}$, 重复上述过程, 由于 $L_p(G, M, I)$ 是有限集, 所以, 至少可以找到一个约简。因此, 面向属性概念约简必存在。

性质 3 对于任意 $g \in G, m \in M$, 一定有 $(g^{\diamond\Box}, g^{\Box\diamond}) \in L_p(G, M, I)$,

$$(m^{\diamond c}, m^{\diamond c \diamond}) \in L_p(G, M, I).$$

证明 由定义2可得, $m^{\diamond c} = \{g \in G \mid gI^c m\}$
 $= m^{\square}$, 则 $m^{\diamond c \diamond} = m^{\square \diamond}$, 故 $(m^{\diamond c}, m^{\diamond c \diamond}) =$
 $(m^{\square}, m^{\square \diamond})$. 由定义3和性质1可知, $(g^{\square}, g^{\diamond})$
 $\in L_p(G, M, I), (m^{\diamond c}, m^{\diamond c \diamond}) \in L_p(G, M, I)$.

定义5 设 (G, M, I) 是形式背景, 称 $(g^{\square}, g^{\diamond})$ 是面向属性概念格的对象概念. 记所有面向属性概念格的对象概念的集合为 $\mathcal{O}_p(G, M, I)$. 对偶地, 称 $(m^{\diamond c}, m^{\diamond c \diamond})$ 是面向属性概念格的属性概念. 记所有面向属性概念格的属性概念的集合为 $\mathcal{A}_p(G, M, I)$.

本文中面向属性概念格的对象概念与属性概念分别简称为对象概念与属性概念.

定理3 $\mathcal{O}_p(G, M, I)$ 与 $\mathcal{A}_p(G, M, I)$ 均为面向属性概念协调集.

证明 由于 $(g^{\square}, g^{\diamond})$ 是面向属性概念, 由性质2知 $(g^{\square}, g^{\diamond c})$ 是 N 概念. 由定义1与定义2中 $*$ 算子与 $\diamond$ 算子的定义可知 $g^{\diamond c} = g^*$, 故 $(g^{\square}, g^{\diamond c}) = (g^*, g^*)$. 下证 $I^c = \bigcup_{g \in G} g^* \bar{g}^*$. 由 $*$ 算子性质知, 对于任意 $g \in G$, 有 $g \subseteq g^* \bar{g}^*$, 则 $g \times g^* \subseteq g^* \bar{g}^* \times g^*$, 所以 $I^c = \bigcup_{g \in G} g \times g^* \subseteq \bigcup_{g \in G} g^* \bar{g}^* \times g^*$. 又因为 $\bigcup_{g \in G} g^* \bar{g}^* \times g^* \subseteq I^c$, 故 $I^c = \bigcup_{g \in G} g^* \bar{g}^* \times g^*$. 因此, $\mathcal{O}_p(G, M, I)$ 为面向属性概念协调集. 同理, $\mathcal{A}_p(G, M, I)$ 为面向属性概念协调集.

例2 (续例1) 由例1可知在形式背景 (G, M, I) 中, $1^{\diamond} = \{a, c, e, f\}$, $1^{\square} = \{1, 3, 4\}$, $a^{\diamond c} = \{3, 4\}$, $a^{\diamond c \diamond} = \{c, f\}$, 由定义5知, c_4 为对象概念, c_7 为属性概念. 类似地, 得 $\mathcal{O}_p(G, M, I) = \{c_4, c_6, c_7, c_8\}$, $\mathcal{A}_p(G, M, I) = \{c_2, c_3, c_4, c_6, c_7\}$. 可验证此时 $\mathcal{O}_p(G, M, I), \mathcal{A}_p(G, M, I)$ 均是面向属性概念协调集.

2.2 面向属性概念约简求解方法

本小节给出面向属性概念协调集判定定理, 并从 POC 代表概念矩阵的角度给出面向属性概念约简的求解方法.

定义6 设 (G, M, I) 是形式背景, $g \in G, m \in M, (X, B) \in L_p(G, M, I)$. 如果 $(g, m) \in X \times B^c$, 则称 (X, B) 是 (g, m) 关于面向属性概念的代表概念, 简称 POC 代表概念, 其全体记为 $\text{REP}((g, m))$. 在此基础上, 称

$$\mathbf{A} = \{\text{REP}((g, m)) \mid (g, m) \in X \times B^c\} \quad (9)$$

为形式背景 (G, M, I) 关于面向属性概念的代表

概念矩阵, 简称 POC 代表概念矩阵.

事实上, 与所有非空 $\text{REP}((g, m))$ 相交非空的面向属性概念集就是面向属性概念协调集.

定理4 (面向属性概念协调集判定定理) 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格. 对于任意 $F \subseteq L_p(G, M, I), F \neq \emptyset$, 下列命题等价:

- 1) F 是面向属性概念协调集;
- 2) 对于任意 $(g, m) \in I^c, F \cap \text{REP}((g, m)) \neq \emptyset$;
- 3) 对于任意 $D \subseteq L_p(G, M, I)$, 若 $F \cap D = \emptyset$, 则 $D \notin \mathbf{A}$.

证明 1) $\Rightarrow$ 2). 由 F 是面向属性概念协调集可知: $I^c = \bigcup_{(X, B) \in F} X \times B^c$. 所以对任意 $(g, m) \in I^c$, 存在 $(X, B) \in F$, 使得 $(g, m) \in X \times B^c$, 即 $(X, B) \in \text{REP}((g, m))$. 故 $F \cap \text{REP}((g, m)) \neq \emptyset$.

2) $\Rightarrow$ 1). 对任意 $(g, m) \in I^c, F \cap \text{REP}((g, m)) \neq \emptyset$, 故存在 $(X, B) \in F$, 满足 $(X, B) \in \text{REP}((g, m))$, 即存在 $(X, B) \in F$ 满足 $(g, m) \in X \times B^c$. 因此, $\bigcup_{(X, B) \in F} X \times B^c = \bigcup_{(g, m) \in X \times B^c, (X, B) \in F} \{(g, m)\} = I^c$, 故 F 是面向属性概念协调集.

2) $\Rightarrow$ 3). 假设 $D \in \mathbf{A}$, 因为 $\mathbf{A} = \{\text{REP}((g, m)) \mid (g, m) \in X \times B^c\}$ 且对于任意 $(g, m) \in I^c, F \cap \text{REP}((g, m)) \neq \emptyset$, 所以 $F \cap D \neq \emptyset$, 矛盾. 因此, $D \notin \mathbf{A}$.

3) $\Rightarrow$ 2). 假设对于任意的 $(g, m) \in I^c$, 有 $F \cap \text{REP}((g, m)) = \emptyset$. 因为对于任意 $D \subseteq L_p(G, M, I)$, 若 $F \cap D = \emptyset$, 有 $D \notin \mathbf{A}$, 所以 $\text{REP}((g, m)) \notin \mathbf{A}$, 矛盾. 故对于任意 $(g, m) \in I^c, F \cap \text{REP}((g, m)) \neq \emptyset$.

结合定义4与定理4即可得到面向属性概念约简判定定理.

定理5 (面向属性概念约简判定定理) 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格. 对于任意 $F \subseteq L_p(G, M, I)$, 若满足以下两个条件:

- 1) 对于任意 $(g, m) \in I^c, F \cap \text{REP}((g, m)) \neq \emptyset$;
 - 2) 对于任意 $(X, B) \in F$, 有 $(g_0, m_0) \in I^c$, 使得 $(F \setminus \{(X, B)\}) \cap \text{REP}((g_0, m_0)) = \emptyset$.
- 则 F 是面向属性概念约简.

在 POC 代表概念矩阵中存在一些冗余的 $\text{REP}((g, m))$, 使得求解面向属性概念约简的时间复杂度有所增加. 为解决此问题, 定义了最小

POC 代表概念矩阵 $\mathbf{A}_{\min}$ 。

定义 7 设 (G, M, I) 是形式背景, $\mathbf{A}_{\min}$ 是包含关系下由所有极小 $\text{REP}((g, m))$ 组成的矩阵, 则称 $\mathbf{A}_{\min}$ 为形式背景 (G, M, I) 的最小 POC 代表概念矩阵。

基于最小 POC 代表概念矩阵给出求解面向属性概念约简的方法。

定义 8 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格, 面向属性概念的代表概念函数定义为

$$f(\mathbf{A}_{\min}) = \bigwedge_{H \in \mathbf{A}_{\min}} \left(\bigvee_{h \in H} h \right). \quad (10)$$

$f(\mathbf{A}_{\min})$ 所对应的最小析取范式的所有合取

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \emptyset & \{c_4\} & \emptyset & \{c_2, c_4\} & \emptyset & \emptyset & \{c_4\} \\ \emptyset & \emptyset & \{c_6\} & \emptyset & \{c_3, c_6\} & \{c_6\} & \emptyset \\ \{c_7\} & \{c_4, c_7\} & \emptyset & \{c_2, c_4, c_5, c_7\} & \{c_3, c_5, c_7\} & \emptyset & \{c_4, c_7\} \\ \{c_7\} & \{c_4, c_7\} & \emptyset & \{c_2, c_4, c_5, c_7\} & \{c_3, c_5, c_7\} & \emptyset & \{c_4, c_7\} \\ \emptyset & \emptyset & \{c_6, c_8\} & \{c_2, c_5, c_8\} & \{c_3, c_5, c_6, c_8\} & \{c_6, c_8\} & \emptyset \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{\min} = \begin{pmatrix} \emptyset & \{c_4\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{c_6\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{c_7\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c_2, c_5, c_8\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

进而得

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}_{\min}) &= \bigwedge_{H \in \mathbf{A}_{\min}} \left(\bigvee_{h \in H} h \right) = \\ &= c_4 \wedge c_6 \wedge c_7 \wedge (c_2 \vee c_5 \vee c_8) = \\ &= (c_2 \wedge c_4 \wedge c_6 \wedge c_7) \vee (c_4 \wedge c_5 \wedge \\ &= c_6 \wedge c_7) \vee (c_4 \wedge c_6 \wedge c_7 \wedge c_8). \end{aligned}$$

即形式背景的面向属性概念约简有 3 个, 分别是

$$\begin{aligned} F_1 &= \{c_2, c_4, c_6, c_7\}, \\ F_2 &= \{c_4, c_5, c_6, c_7\}, \\ F_3 &= \{c_4, c_6, c_7, c_8\}. \end{aligned}$$

2.3 面向属性概念特征

每个面向属性概念在面向属性概念格中所起的作用是不同的, 本小节从面向属性概念约简出发, 将面向属性概念分为 3 类, 即核心面向属性概念, 相对必要面向属性概念, 绝对不必要面向属性概念, 并分别研究其特征。

定义 9 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M,$

式为形式背景 (G, M, I) 的所有面向属性概念约简。

例 3 (续例 1) 由性质 2 可知所有补概念为 $(G, \emptyset), (1345, d), (2345, e), (134, bdg), (345, de), (25, cef), (34, abdeg), (5, cdef), (\emptyset, M)$ 。遍历所有补概念可知, $(1, b) \in \{1, 3, 4\} \times \{b, d, g\}$, 所以, 由定义 6 知 $\text{REP}((1, b)) = \{(\{1, 3, 4\}, \{a, c, e, f\})\} = \{c_4\}$ 。类似地, 对于任意 $g \in G, m \in M, \text{REP}((g, m))$ 即可得。由此, 形式背景 (G, M, I) 的 POC 代表概念矩阵与最小 POC 代表概念矩阵为

$I)$ 是其面向属性概念格。记 $R = \{F_i \mid i \in \tau, \tau \text{ 为指标集}\}$ 为 (G, M, I) 的所有面向属性概念约简的集合, 则 $L_p(G, M, I)$ 可分为 3 类:

- 1) 核心面向属性概念集 $C = \bigcap_{i \in \tau} F_i$;
- 2) 相对必要面向属性概念集 $K = \bigcup_{i \in \tau} F_i \setminus \bigcap_{i \in \tau} F_i$;
- 3) 绝对不必要面向属性概念集 $U = L_p(G, M, I) \setminus \bigcup_{i \in \tau} F_i$ 。

例 4 (续例 1) 在形式背景 (G, M, I) 中, $C = \{c_4, c_6, c_7\}, K = \{c_2, c_5, c_8\}, U = \{c_1, c_3, c_9\}$ 。

下面从 POC 代表概念矩阵角度给出核心面向属性概念的概念特征。

定理 6 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格。 $c \in C$ 当且仅当存在 $(g, m) \in I^c$, 使得 $\text{REP}((g, m)) = \{c\}$ 。

证明 $c \in C \Leftrightarrow L_p(G, M, I) \setminus \{c\}$ 不是面向属性概念协调集 $\Leftrightarrow$ 存在 $(g, m) \in I^c$, 使得 $L_p(G, M, I) \setminus \{c\} \cap \text{REP}((g, m)) = \emptyset \Leftrightarrow$ 存在 $(g, m) \in I^c$

使得 $\text{REP}((g, m)) = \{c\}$ 。

定理7从最小POC代表概念矩阵角度给出绝对不必要面向属性概念的概念特征。

定理7 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格。 $c \in U$ 当且仅当对于任意 $\text{REP}((g, m)) \in \mathbf{A}_{\min}, c \notin \text{REP}((g, m))$ 。

证明 必要性。假设存在 $\text{REP}((g, m)) \in \mathbf{A}_{\min}, c \in \text{REP}((g, m))$, 由定理4可知, 存在面向属性概念约简 F_0 , 使得 $c \in F_0$, 即 $c \notin U$, 矛盾。故对任意 $\text{REP}((g, m)) \in \mathbf{A}_{\min}, c \notin \text{REP}((g, m))$ 。

充分性。假设 $c \notin U$, 则存在面向属性概念约简 F_0 , 使得 $c \in F_0$ 。即存在 $\text{REP}((g, m)) \in \mathbf{A}_{\min}$, 使得 $c \in \text{REP}((g, m))$, 矛盾。故 $c \in U$ 。

结合定理6与定理7, 可得相对必要面向属性概念特征如推论1。

推论1 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格。 $c \in K$ 当且仅当存在 $\text{REP}((g, m)) \in \mathbf{A}_{\min}, c \in \text{REP}((g, m))$ 且对于任意 $(g, m) \in I^c$, 满足 $\text{REP}((g, m)) \neq \{c\}$ 。

3 面向属性概念约简与面向对象概念约简的关系

智慧来等在文献[21]中研究了面向对象概念约简, 本文第2节中主要研究了面向属性概念约简, 本节讨论两者之间的关系。

定义10^[21] 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_o(G, M, I)$ 是其面向对象概念格, $F \subseteq L_o(G, M, I)$ 。如果 $I^c = \bigcup_{(X, B) \in F} X^c \times B$, 则称 F 为面向对象概念协调集; 若对于任意 $(X_0, B_0) \in F, F' = F \setminus \{(X_0, B_0)\}$, 有 $I^c \neq \bigcup_{(X, B) \in F'} X^c \times B$, 则称 F 为面向对象概念约简。

引理2给出面向属性概念与面向对象概念之间的关系。

引理2^[14] 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 是其面向属性概念格, $L_o(G, M, I)$ 是其面向对象概念格。 $(X, B) \in L_p(G, M, I)$ 当且仅当 $(X^c, B^c) \in L_o(G, M, I)$ 。

下面从定义角度给出面向属性概念约简与面向对象概念约简之间的联系。

定理8 $F = \{(X_1, B_1), (X_2, B_2), \dots, (X_n, B_n)\}$ 是面向属性概念约简当且仅当 $F' = \{(X_1^c, B_1^c), (X_2^c, B_2^c), \dots, (X_n^c, B_n^c)\}$ 是面向对象概念约简。

证明 必要性。因为 $F = \{(X_1, B_1), (X_2, B_2), \dots, (X_n, B_n)\}$ 是面向属性概念约简, 所以 $I^c = \bigcup_{(X_i, B_i) \in F} X_i^c \times B_i^c$ 且对于任意 $(X_0, B_0) \in F$, 有 $I^c \neq \bigcup_{(X_i, B_i) \in F \setminus \{(X_0, B_0)\}} X_i^c \times B_i^c$ 。由引理2知, $(X, B) \in L_p(G, M, I) \Leftrightarrow (X^c, B^c) \in L_o(G, M, I)$, 即所有 (X_i^c, B_i^c) 均为面向对象概念。又因为 $I^c = \bigcup_{(X_i^c, B_i^c) \in F'} X_i^c \times B_i^c$ 且对任意 $(X_0^c, B_0^c) \in F'$, 有 $I^c \neq \bigcup_{(X_i^c, B_i^c) \in F' \setminus \{(X_0^c, B_0^c)\}} X_i^c \times B_i^c$, 故 $F' = \{(X_1^c, B_1^c), (X_2^c, B_2^c), \dots, (X_n^c, B_n^c)\}$ 是面向对象概念约简。

充分性同理可证。

由定理8可知, 面向属性概念约简与面向对象概念约简可相互得到。下面定理说明面向属性概念特征与面向对象概念特征之间的关系。

定理9 设 (G, M, I) 是形式背景, $L_p(G, M, I)$ 与 $L_o(G, M, I)$ 分别是其面向属性概念格与面向对象概念格。 C, K, U 分别是核心、相对必要、绝对不必要面向属性概念集, C_o, K_o, U_o 分别是核心、相对必要、绝对不必要面向对象概念集。对于任意 $(X, B) \in L_p(G, M, I)$, 有

- 1) $(X, B) \in C \Leftrightarrow (X^c, B^c) \in C_o$;
- 2) $(X, B) \in K \Leftrightarrow (X^c, B^c) \in K_o$;
- 3) $(X, B) \in U \Leftrightarrow (X^c, B^c) \in U_o$ 。

证明 1) 记 $R = \{F_i \mid i \in \tau, \tau \text{ 为指标集}\}$ 是面向属性概念约简的集合, 则 $R' = \{F'_i \mid i \in \tau, \tau \text{ 为指标集}\}$ 是面向对象概念约简的集合。其中, F'_i 是由面向属性概念约简 F_i 得到的面向对象概念约简。

由定理8可得, $(X, B) \in C \Leftrightarrow (X, B) \in \bigcap_{i \in \tau} F_i \Leftrightarrow (X^c, B^c) \in \bigcap_{i \in \tau} F'_i \Leftrightarrow (X^c, B^c) \in C_o$ 。

2)、3) 同理可得。

例5 (续例1) 由定理8知, 形式背景 (G, M, I) 的面向对象概念约简分别为

$F'_1 = \{(2, d), (25, bdg), (134, cef), (125, abdeg)\}$,

$F'_2 = \{(25, bdg), (12, de), (134, cef), (125, abdeg)\}$,

$F'_3 = \{(25, bdg), (134, cef), (125, abdeg), (1234, cdeg)\}$ 。

由定理9可知, 核心面向对象概念集 C_o 、相对必要面向对象概念集 K_o 、绝对不必要面向对象概念集 U_o 分别为

$C_o = \{(25, bdg), (134, cef), (125, abdeg)\}$,

$$K_o = \{(2,d),(12,de),(1234,cdef)\},$$
$$U_o = \{(\emptyset,\emptyset),(1,e),(G,M)\}.$$

4 面向属性概念约简的应用

Rusch 和 Wille 在文献[22] 中将知识空间与形式背景相结合,提出了由形式背景构造知识空间的方法.李进金等通过知识基建立了形式背景和知识空间的联系^[23].周银凤等将合取技能映射转换成技能背景,通过求解技能背景的所有面向属性概念得到由合取技能映射诱导的知识结构^[15].对于合取技能映射诱导的知识结构,可通过所有面向属性概念确定相应的技能背景.但由合取技能映射诱导的知识结构中存在冗余信息,本节通过面向属性概念约简对应的部分知识结构确定与之对应的技能背景.

首先,给出知识结构的定义.

定义 11^[24] 给定问题集 Q ,学习者能解决的问题子集 $K \subseteq Q$ 称为知识状态. $(Q, \mathcal{K})$ 为知识结构,其中, $\mathcal{K}$ 是由知识状态构成的集族且至少包含 $\emptyset$ 和 Q .

在问题集 Q 明确的情况下,知识结构简记为 $\mathcal{K}$.

例 6 假设问题集为 $Q = \{1,2,3,4,5\}$,则 $\mathcal{K}_1 = \mathcal{P}(Q)$, $\mathcal{K}_2 = \{\emptyset, \{1,2\}, Q\}$ 都是知识结构.

定义 12^[25] 三元组 (Q, S, μ) 称为一个合取技能映射.其中: Q 为非空问题集; S 为非空技能集; μ 为 Q 到 $2^S \setminus \emptyset$ 的映射,且对于任意 $q \in Q$, $\mu(q) \subseteq S$ 表示解决问题 q 的极小能力.对任意技能子集 $T \subseteq S$, T 通过合取技能映射 μ 诱导的知识状态表示为 $K = \{q \in Q \mid \mu(q) \subseteq T\}$.所有的知识状态组成的知识结构用 $\mathcal{K}$ 表示.

下面,给出合取技能映射与技能背景之间的联系.

定义 13^[15] 设 (Q, S, μ) 是合取技能映射,问题集 Q 为对象,技能集 S 为属性,根据关系 $s \in \mu(q) \Leftrightarrow (q, s) \in I$,则合取技能映射 (Q, S, μ) 可转换为形式背景 (Q, S, I) ,称这样的形式背景为技能背景.

例 7 给定合取技能函数 (Q, S, μ) .其中: $Q = \{1,2,3,4,5\}$ 表示 5 个问题; $S = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ 表示 7 种办公技能, a 表示文案撰写, b 表示 LaTeX 排版, c 表示 Word 排版, d 表示外文翻译, e

表示 Python 编程, f 表示宣传策划, g 表示图片处理.设 $\mu(1) = \{a,c,e,f\}$, $\mu(2) = \{a,b,d,g\}$, $\mu(3) = \{c,f\}$, $\mu(4) = \{c,f\}$, $\mu(5) = \{a,b,g\}$,则技能背景 (Q, S, I) 如表 2 所示.其中, $\mu(5) = \{a,b,g\}$ 表示求解问题 5 需至少具备技能 a,b,g .

表 2 技能背景 (Q, S, I)

Tab. 2 Skill context (Q, S, I)

	a	b	c	d	e	f	g
1	1	0	1	0	1	1	0
2	1	1	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	1	0
5	1	1	0	0	0	0	1

定理 10^[15] 设 (Q, S, I) 是与合取技能映射 (Q, S, μ) 对应的技能背景.对于任意 $(K, T) \in L_p(Q, S, I)$,技能子集 $T \subseteq S$ 通过 μ 诱导的知识状态为 K ,记

$$\mathcal{K} = \{K \mid (K, T) \in L_p(Q, S, I)\},$$

则 $\mathcal{K}$ 是由 μ 诱导得到的知识结构.

由于知识结构是所有面向属性概念的外延组成的集族,根据本文第 2 节可知所有面向属性概念可确定技能背景中的所有补二元关系,即由知识结构可确定与之对应的技能背景.但知识结构中存在冗余信息,通过面向属性概念约简的定义可知,面向属性概念约简即可确定形式背景中所有补二元关系,即由面向属性概念约简的外延构成的部分知识结构可确定与之对应的技能背景.

例 8 (续例 7) 技能背景中的所有面向属性概念为 $c_1 = (Q, S)$, $c_2 = (1345, abcefg)$, $c_3 = (2345, abcd fg)$, $c_4 = (134, acef)$, $c_5 = (345, abc fg)$, $c_6 = (25, abd g)$, $c_7 = (34, cf)$, $c_8 = (5, abg)$, $c_9 = (\emptyset, \emptyset)$.其中, $c_6 = (25, abd g)$ 表示解决问题 2 与问题 5 需至少具备技能 a,b,d,g .

由定理 9 可知,合取技能映射诱导的知识结构为 $\mathcal{K} = \{Q, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,3,4\}, \{3,4,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{5\}, \emptyset\}$.由知识结构 $\mathcal{K}$ 可得对应的技能背景,即表 2.

由例 3 可知,技能背景 (Q, S, I) 有 3 个面向属性概念约简,分别为 $F_1 = \{c_2, c_4, c_6, c_7\}$, $F_2 = \{c_4, c_5, c_6, c_7\}$, $F_3 = \{c_4, c_6, c_7, c_8\}$.以 F_1 为例,

$\{c_2, c_4, c_6, c_7\}$ 包含的部分知识结构是 $\mathcal{K}' = \{\{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$, 通过 $\mathcal{K}'$ 即可确定与之对应技能背景 (Q, S, I) 。

5 结语

概念约简作为一种新的约简理论,既保持了形式背景原始信息不变,又减少了概念数量。本文将概念约简思想引入面向属性概念格,研究了面向属性概念约简的问题。首先,给出了面向属性概念约简的定义,随后给出了面向属性概念约简的求解方法并根据面向属性概念在约简中的不同作用,将其分为核心、相对必要、绝对不必要面向属性概念;其次,从定义角度探讨了面向属性概念约简与面向对象概念约简之间的关系;最后,给出了面向属性概念约简在知识空间中的应用。

形式概念分析的研究已不再局限于经典的形式背景,因此,如何将面向属性概念约简理论扩展到不完备形式背景、模糊背景、区间值背景也是值得探讨的问题。

参考文献

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts [C] // Ordered Sets. Dordrecht-Boston: Springer, 1982: 445-470.
- [2] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: Mathematical foundations [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
- [3] 张文修,魏玲,祁建军. 概念格的属性约简理论与方法[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2005, 35(6): 628-639.
ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattice [J]. Science in China Series F-Information Sciences, 2005, 48(6): 713-726.
- [4] 魏玲,祁建军,张文修. 决策形式背景的概念格属性约简[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2008, 38(2): 195-208.
WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts [J]. Science in China Series F-Information Sciences, 2008, 51(7): 910-923.
- [5] WANG Z, WEI L, QI J J, et al. Attribute reduction of SE-ISI concept lattices for incomplete contexts [J]. Soft Computing, 2020, 24(20): 15143-15158.
- [6] LI J H, MEI C L, LYU Y J. Knowledge reduction in decision formal contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(5): 709-715.
- [7] YANG H Z, YEE L, SHAO M W. Rule acquisition and attribute reduction in real decision formal contexts [J]. Soft Computing, 2011, 15(6): 1115-1128.
- [8] LI J H, MEI C L, KUMAR C A, et al. On rule acquisition in decision formal contexts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2013, 4(6): 721-731.
- [9] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-way formal concept analysis [C] // International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Cham: Springer, 2014: 732-741.
- [10] QI J J, QIAN T, WEI L. The connections between three-way and classical concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91(1): 143-151.
- [11] DUNTSCH N, GEDIGA G. Modal-style operators in qualitative data analysis [C] // Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Data Mining. Washington, DC: IEEE, 2002: 155-162.
- [12] YAO Y Y. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis [C] // Rough Sets and Current Trends in Computing. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004: 59-68.
- [13] 魏玲,李强. 面向属性概念格基于覆盖的压缩[J]. 电子科技大学学报, 2012, 41(2): 299-304.
WEI L, LI Q. Covering-based reduction of property-oriented concept lattices [J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2012, 41(2): 299-304.
- [14] MEDINE J. Relating attribute reduction in formal, object-oriented and property-oriented concept lattices [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 64(6): 1992-2002.
- [15] 周银凤,李进金,冯丹露,等. 形式背景下的学习路径与技能评估[J]. 模式识别与人工智能, 2021, 34(12): 1069-1084.
ZHOU Y F, LI J J, FENG D L, et al. Learning paths and skills assessment in formal context [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2021, 34(12): 1069-1084.
- [16] 曹丽,魏玲,祁建军. 保持二元关系不变的概念约简[J]. 模式识别与人工智能, 2018, 31(6): 516-524.
- [17] 魏玲,曹丽,祁建军,等. 形式概念分析中的概念

约简与概念特征 [J]. 中国科学: 信息科学, 2020, 50(12): 1817-1833.

WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis [J]. Scientia Sinica Informationis, 2020, 50(12): 1817-1833.

[18] 王霞, 彭致华, 李俊余, 等. 一种基于概念可辨识矩阵的概念约简方法 [J]. 计算机科学, 2021, 48(1): 125-130.

WANG X, PENG Z H, LI J Y, et al. Method of concept reduction based on concept discernibility matrix [J]. Computer Science, 2021, 48(1): 125-130.

[19] 谢小贤, 李进金, 陈东晓, 等. 基于布尔矩阵的保持二元关系不变的概念约简 [J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(5): 32-45.

XIE X X, LI J J, CHEN D X, et al. Concept reduction of preserving binary relations based on Boolean matrix [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2020, 55(5): 32-45.

[20] ZHAO S Y, QI J J, LI J A, et al. Concept reduction in formal concept analysis based on representative concept matrix [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2023, 14(4): 1147-1160.

[21] 智慧来, 李逸楠. 形式概念分析中的面向对象概念约简 [J]. 海南热带海洋学院学报, 2021, 28(5): 66-71.

ZHI H L, LI Y N. Object-oriented concept reduction in formal concept analysis [J]. Journal of Hainan Tropical Ocean University, 2021, 28(5): 66-71.

[22] RUSCH A, WILLE R. Knowledge spaces and formal concept analysis [C]//Proceedings of the 19th Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e. V. . Berlin, Heidelberg: Springer, 1996: 427-436.

[23] 李进金, 孙文. 知识空间、形式背景和知识基 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2019, 49(4): 517-526.

LI J J, SUN W. Knowledge space, formal context and knowledge base [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2019, 49(4): 517-526.

[24] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge [J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1985, 23(2): 175-196.

[25] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. Learning spaces: Interdisciplinary applied mathematics [M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.

(编辑 张 欢)